

# Podstawy automatyki

WYKŁAD

*Edward  
Tertel  
dr inż.*

## Cel dydaktyczny

- Zna podstawowe pojęcia z zakresu automatyki, metod opisu oraz analizy i syntezy elementów i układów automatyki.
- Ma wiedzę na temat podstawowych struktur układów sterowania, regulatorów oraz modelowania układów automatyki.
- Potrafi zaprojektować podstawowe kombinacyjne i sekwencyjne układy sterowania przy użyciu logicznych elementów automatyki.
- Potrafi zaprojektować wybrany układ sterowania samodzielnie jak też pracując w zespole.

## Zakres tematyczny

Pojęcia podstawowe z zakresu automatyki i robotyki. Obiekt, sygnał, sterowanie, regulacja.

Struktury układów sterowania. Układ liniowy oraz nieliniowy, linearyzacja. Modelowanie układów automatyki.

Przekształcenie Laplace'a. Transmittancja operatorowa i widmowa.

Modele układów dynamicznych i sposoby ich analizy.

Schematy blokowe układów automatyki.

Podstawowe człony automatyki.

Opis układu automatyki w przestrzeni stanu.

Układy automatycznej regulacji. Regulatory. Regulacja dwupołożeniowa.

Układy sterowania procesami dyskretnymi - podstawy układów binarnych. Układy kombinacyjne i sekwencyjne.

## Podstawy automatyki

### LITERATURA:

H. Vogt, J. Mazurek, W. Żydanowicz: *Podstawy automatyki*, OW Polit. Warsz.

Mikulczyński T. (red.): *Podstawy automatyki*, OW Polit. Wroc.

Staszewski J., Podstawy automatyki : *Zbiór zadań z przykładowymi rozwiązaniami*. OW Polit. Wroc.

Brozi A.: *Scilab w przykładach*, wyd. NAKOM

Karczewski J., Szuman P.: *SCILAB. Modelowanie i symulacja pracy układów automatyki*. Wyd. NAKOM

Honczarenko Jerzy: *Roboty przemysłowe. Budowa i zastosowanie*. WNT.

Chorowski B. Werszko M. *Mechaniczne urządzenia automatyki*. WNT.

# Podstawy automatyki

## LITERATURA:

### Czasopisma:

- Pomiary Automatyka Robotyka,
- Automatyka – podzespoły i aplikacje,
- Pomiary Automatyka Kontrola,

### www:

<https://staff.uz.zgora.pl/etertel/dlastudentow.html>

<https://www.scilab.org/software/xcos>

<https://www.scilab.org/tutorials>

<http://portalautomatyki.pl>, <http://www.automatyka.pl/> <http://www.robotyka.com/>

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### AUTOMATYKA

Jako samodzielna dyscyplina nauk. powstała w latach 20. XX wieku.

Pierwsze urządzenia automatyczne były znane znacznie wcześniej:

- regulator poziomu wody w kotle parowym (1765)
- regulator prędkości obrotowej maszyny parowej (1784).

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### AUTOMATYKA

**Automatyka** jest nauką interdyscyplinarną zajmującą się **teorią** oraz **praktyczną** realizacją urządzeń technicznych do samoczynnej (bez udziału człowieka lub z ograniczonym jego udziałem) obsługi różnych procesów w zakresie **zbierania informacji, przetwarzania jej i podejmowania decyzji** dotyczących **sterowania** pracą obiektów rzeczywistych.

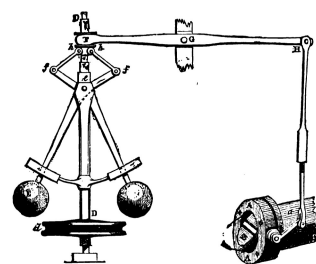
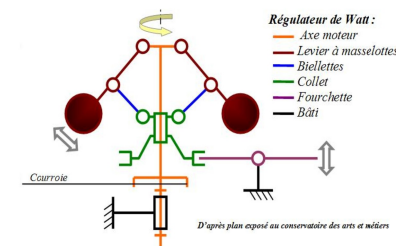
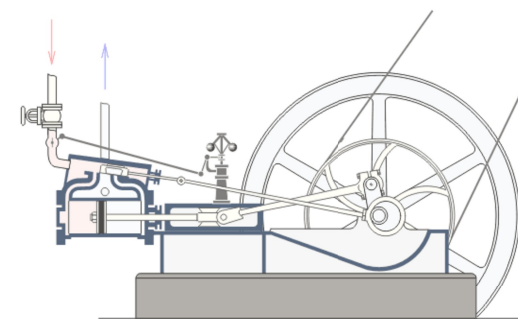


FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.  
<https://www.istockphoto.com/>



D'après plan exposé au conservatoire des arts et métiers



[https://pl.wikipedia.org/wiki/Maszyna\\_parowa](https://pl.wikipedia.org/wiki/Maszyna_parowa)

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### AUTOMATYKA

Podstawowe działy automatyki to:

- regulacja automatyczna,
- sterowanie procesami złożonymi,
- pomiary automatyczne,
- przetwarzanie i utrwalanie danych,
- telemechanika.

9

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### AUTOMATYKA - sygnał

**Sygnał** – przebieg czasowy określonej wielkości fizycznej, za pomocą której przekazywane są informacje o stanie układu, procesie lub otoczeniu, - wielkość fizyczna niosąca informację o innej wielkości fizycznej.

Sygnały są kluczowym elementem systemów automatyki, ponieważ umożliwiają przekazywanie i przetwarzanie informacji niezbędnych do prawidłowego działania układów sterowania.

10

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### AUTOMATYKA - sygnał

Na sygnał składają się:

**treść sygnału** – informacja (wiadomość) przenoszona przez sygnał, (np. wartość prędkości, temperatury, ciśnienia itp.)

**nośnik sygnału** – wielkość fizyczna (np. natężenie czy napięcie prądu, wychylenie wskazówki, kolor itp.) której zmiany umożliwiają przekazanie określonych treści.

11

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### AUTOMATYKA - sygnał

Sygnały w automatyce:

- niezależne,
- zależne.

Gdy sygnały są zależne, znając przebieg jednego z sygnałów można wyznaczyć przebieg drugiego.

12

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### AUTOMATYKA - sygnał

Sygnały w automatyce:

- **Analogowe** – zmieniają się w sposób ciągły w czasie (np. temperatura).
- **Cyfrowe** – przyjmują skończoną liczbę wartości (np. stan 0/1 w systemach binarnych).

13

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

**Sterowanie** to takie działanie systemu, przy którym na jedną lub więcej wielkości charakteryzujących system wpływa się w sposób celowy. tzn. w celu osiągnięcia pożądaných wyników poprzez zmianę jego parametrów, stanów lub zachowania.

**Sterowanie** – oddziaływanie na określony proces (obiekt sterowania) w celu zapewnienia mu właściwego przebiegu; występuje w systemach biologicznych i jest stosowane w systemach technicznych oraz ekonomicznych.

14

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

Przykłady:

- Utrzymanie zadanej wartości wielkości sterowanej (np. utrzymanie temperatury w piecu na poziomie 200°C).
- Osiągnięcie określonego stanu (np. ustawienie ramienia robota w konkretnej pozycji).
- Optymalizację procesu (np. minimalizacja zużycia energii lub skrócenie czasu cyklu produkcyjnego).
- Bezpieczeństwo i niezawodność (np. automatyczne wyłączenie maszyny w przypadku awarii, automatyczne roгатki).

15

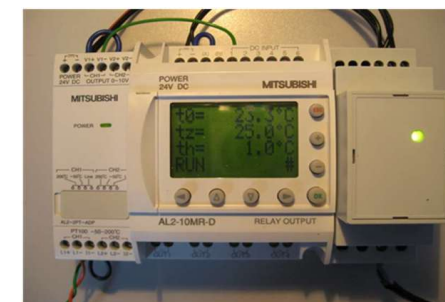
## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

**Sterowanie ręczne** – sterowanie realizowane bezpośrednio przez człowieka.



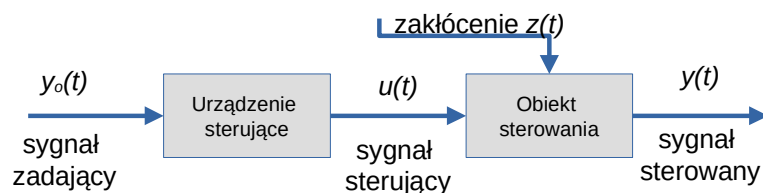
**Sterowanie automatyczne** – realizowane przez odpowiednie urządzenie sterujące.



## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

**Układ sterowania** – składa się z obiektu sterowania i urządzenia sterującego (układu sterującego).



**Obiekt sterowania** – układ (wyodrębniony umownie fragment rzeczywistości), w którym można wymusić pożądane przebiegi procesów za pomocą oddziaływań sterujących.

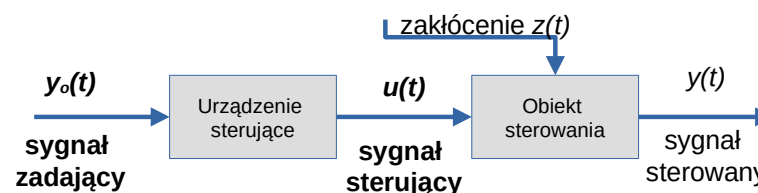
**Urządzenie sterujące** – jest to urządzenie lub zestaw urządzeń, które generują sygnały sterujące.

17

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

**Sygnały występujące w układach sterowania:**



**zadające** (sygnały zadane) – wyznaczają sposób i wartość zmian sygnałów sterowanych (wyjściowych),

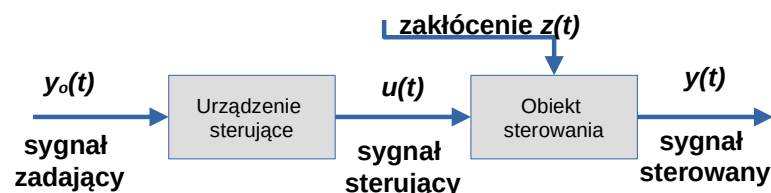
**sterujące** (sterowania) – sygnały doprowadzane do wejść obiektu, zmieniane celowo tak, aby osiągnąć pożądany przebieg sterowanego procesu,

18

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

**Sygnały występujące w układach sterowania:**



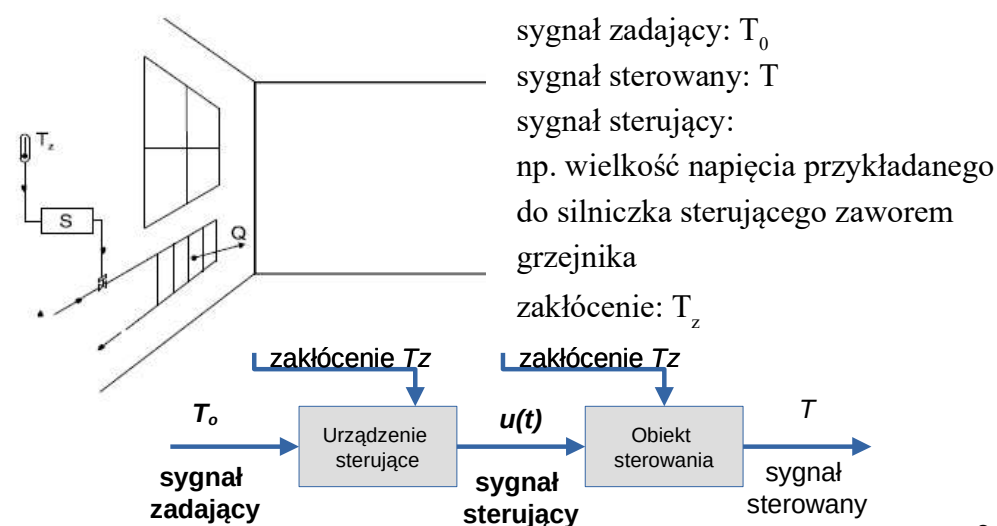
**zakłócające** (zakłócenia) – wszelkie występujące w układzie oddziaływania, które utrudniają realizację zadania sterowania. Zakłócenia mają na ogół charakter przypadkowy,

**wyjściowe** (sygnały sterowane) – występują na wyjściach układu, są wynikiem oddziaływania na obiekt sygnałów sterujących i zakłóceń.

19

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE - przykład

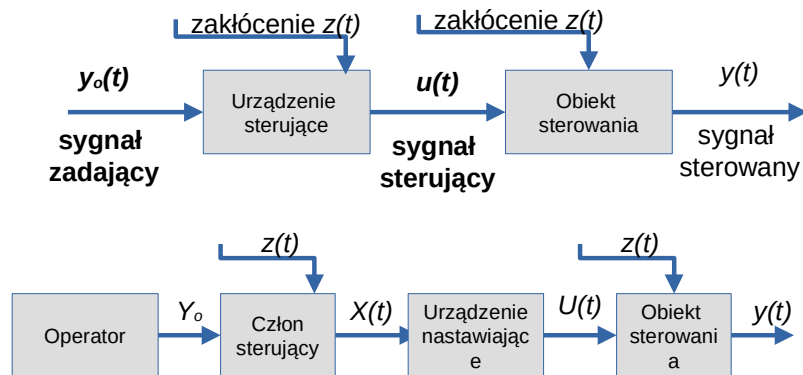


20

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

**Sterowanie w układzie otwartym** to takie sterowanie, przy którym odpowiednie wielkości sterujące wpływają w sposób celowy na wielkości sterowane za pośrednictwem otwartego toru działania.



21

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

#### Sterowanie w układzie otwartym:

Sygnał sterujący jest generowany na podstawie wartości zadanej i znanej charakterystyki obiektu bez informacji zwrotnej o jego aktualnym stanie.

#### Cechy:

- Działa według zaprogramowanego algorytmu.
- Nie reaguje na zmiany w obiekcie sterowania.
- Prosty w realizacji, ale nie zawsze dokładny.
- Stosowany tam, gdzie warunki pracy są stabilne i przewidywalne.

22

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### STEROWANIE

#### Sterowanie w układzie otwartym:

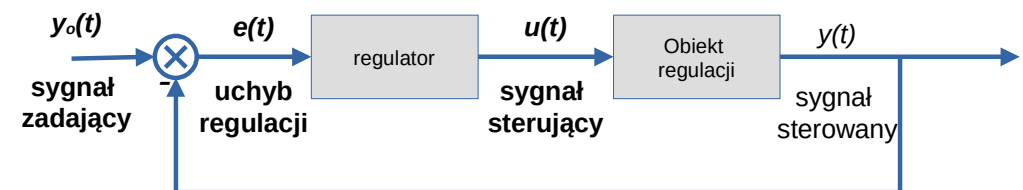
- Pralka automatyczna – działa według ustalonego programu, niezależnie od ilości czy rodzaju ubrań.
- Suszarka do rąk – włącza się po wykryciu rąk, ale nie dostosowuje mocy do ich wilgotności.
- Zraszacz bez czujnika wilgotności – włączają się według zaprogramowanego harmonogramu nawet w czasie deszczu.
- Światła uliczne o stałym cyklu.
- 

23

## PODSTAWOWE DEFINICJE

### REGULACJA

**Regulacja** to proces, przy którym wielkość regulowana jest w sposób ciągły mierzona i porównywana z wielkością zadaną, (wiodącą) i na którą oddziałuje się w celu zbliżania do wielkości zadanej.

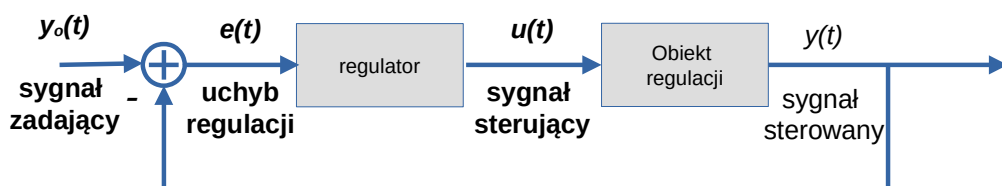


24

# PODSTAWOWE DEFINICJE

## REGULACJA

**Regulację** uważa się za szczególny rodzaj sterowania - w układzie zamkniętym, ponieważ skutek działania pętli sprzężenia zwrotnego wielkość regulowana pośrednio oddziałuje na samą siebie.



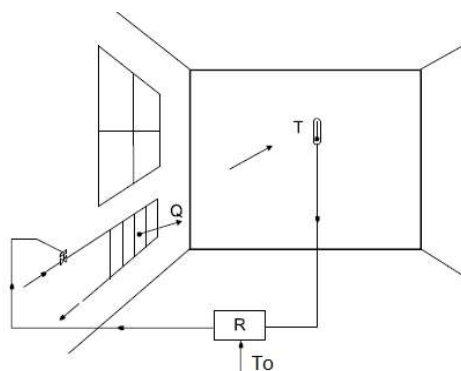
**Regulacja** jest sposobem zmniejszenia wpływu zakłóceń na wielkość regulowaną, a jej celem jest minimalizacja odchylenia wielkości regulowanej (wyjściowej) od jej wartości zadanej (wejściowej). 25

# PODSTAWOWE DEFINICJE

## REGULACJA - przykład

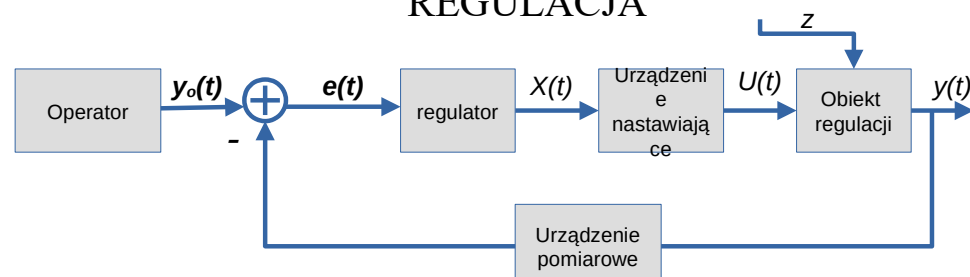
Układ regulacji, sterujący temperaturą  $T$  w pomieszczeniu.

Zadaniem układu jest utrzymywanie stałej temperatury  $T = T_0$ . Układ ten składa się z czujnika temperatury w pomieszczeniu  $T$ , regulatora  $R$  oraz zaworu regulacyjnego przed grzejnikiem. Układ pracuje w obwodzie zamkniętym. Ilość ciepła  $Q$  wydzielanego przez grzejnik ma wpływ na temperaturę rejestrowaną przez czujnik temperatury  $T$  w pomieszczeniu i dalej na regulator  $R$ .



# PODSTAWOWE DEFINICJE

## REGULACJA



W zamkniętych układach sterowania urządzenie sterujące (regulator) otrzymuje informacje dotyczące zarówno pożądanego celu sterowania (sygnały zadające) jak również skutków sterowania (sygnały sterowane). Oddziaływanie urządzeń sterujących na obiekt sterowania zależy od osiągniętych wyników sterowania.

Wykorzystywanie w sterowaniu sygnałów wyjściowych uniezależnia układ sterowania od zakłóceń, ponieważ kontrola skutków sterowania umożliwia bieżące korygowanie tego sterowania. 26

# PODSTAWOWE DEFINICJE

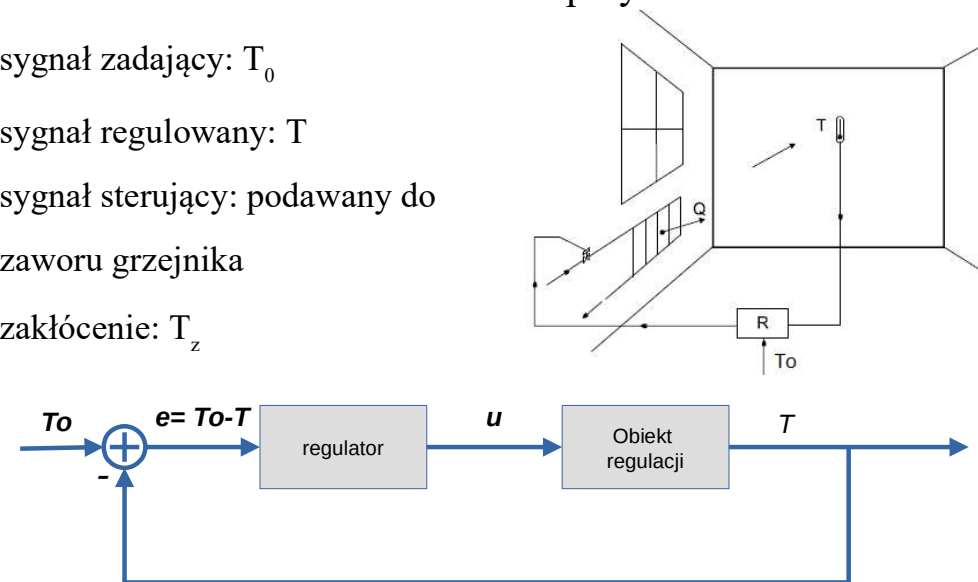
## REGULACJA - przykład

sygnał zadający:  $T_0$

sygnał regulowany:  $T$

sygnał sterujący: podawany do zaworu grzejnika

zakłócenie:  $T_z$

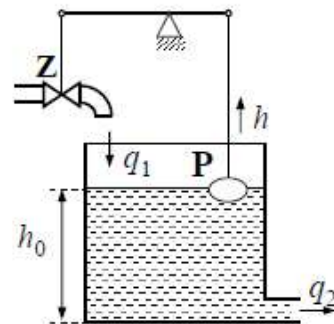




# PODSTAWOWE DEFINICJE

## REGULACJA - przykład

Zadaniem układu jest utrzymanie stałego poziomu  $h_0$  cieczy w zbiorniku, przy zmieniającej się w sposób przypadkowy wartości  $q_2$  strumienia cieczy wypływającej ze zbiornika. Jeżeli poziom cieczy  $h$  w zbiorniku wzrasta – pływak P podnosi się do góry i za pomocą dźwigni i zaworu Z zmniejsza wartość  $q_1$  strumienia cieczy dopływającej do zbiornika.



Jeżeli poziom cieczy w zbiorniku zmaleje, to pływak P opada i za pomocą dźwigni i zaworu Z zwiększa wartość strumienia wody  $q_1$  powodując podwyższenie poziomu cieczy  $h$ .

29

# PODSTAWOWE DEFINICJE

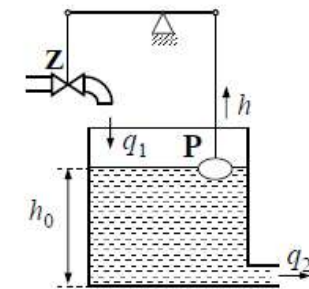
## REGULACJA - przykład

sygnał zadający:  $h_0$

sygnał regulowany:  $h$

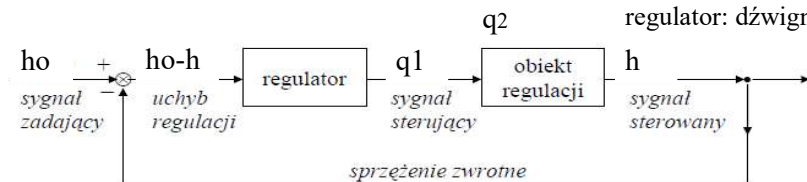
sygnał sterujący:  $q_1$

zakłócenie:  $q_2$



obiekt regulacji: zbiornik

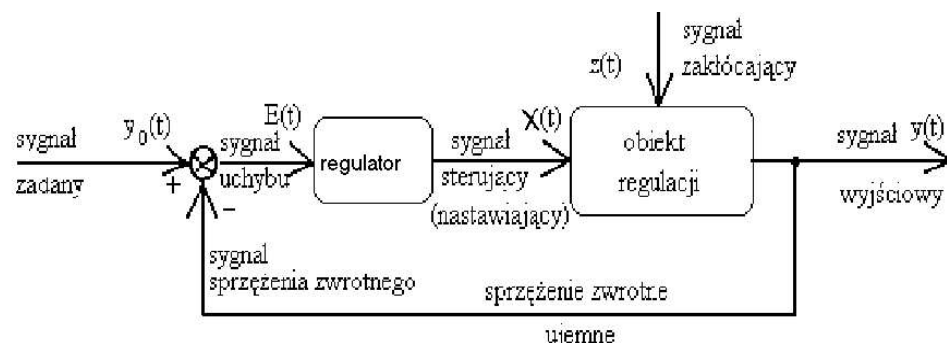
regulator: dźwignia i zawór Z



30

## URA

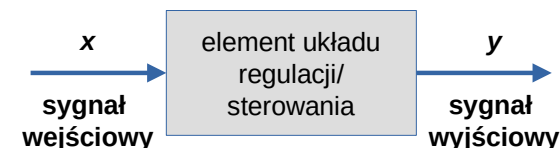
**Układem regulacji automatycznej** nazywamy układ dynamiczny z ujemnym sprzężeniem zwrotnym



Podstawowym celem URA jest samoczynne „zerowanie” uchybu regulacji wywołanego bądź zmianą sygnału  $y_0(t)$  bądź oddziaływaniem zakłóceń  $z(t)$ .

## URA

Każda część układu regulacji automatycznej, dla której można wyodrębnić sygnały wejściowe i wyjściowe nosi nazwę **elementu układu regulacji / sterowania**.



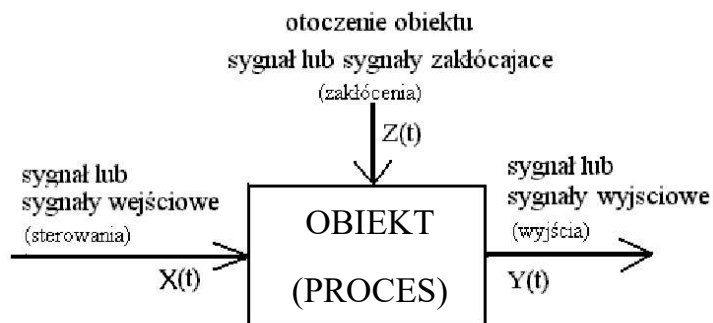
Postać blokowa pozwala na przedstawienie wielu elementów składowych układu regulacji/sterowania: regulator, urządzenie sterujące, obiekt regulacji/sterowania, urządzenie nastawiające, urządzenie pomiarowe ...



## Obiekty w URA

Zagadnieniami dotyczącymi URA zajmuje się automatyka.

Przystępując do projektowania URA, w pierwszej kolejności należy przeprowadzić identyfikację obiektu lub procesu, podlegającego automatyzacji.



## Rodzaje obiektów w URA

- **stacjonarne:**

o właściwościach niezmiennych w czasie, wartość wyjścia zależy od aktualnej wartości wejścia oraz stanu obiektu w rozpatrywanej chwili,

- **niestacjonarne:**

o właściwościach zmiennych w czasie, wartość wyjścia zależy od aktualnej wartości wejścia, stanu obiektu w rozpatrywanej chwili oraz stanów obiektu w chwilach poprzednich

## Rodzaje obiektów w URA

- **ciągłe (analogowe):**

sygnały wejściowe i wyjściowe są ciągłe - przyjmują nieskończoną ilość wartości,

- **dyskretne (cyfrowe):**

przynajmniej jeden sygnał przyjmuje wartości dyskretne (np. binarne).

Obiekty stacjonarne i ciągłe nazywane są obiektami **liniowymi**.

## Rodzaje obiektów liniowych w URA

- **o stałych skupionych:** zmiany wartości sygnału wyjściowego nie zależą od miejsca pomiaru, obiekt opisany w sposób dyskretny, uproszczony, używany w większości modeli inżynierskich.

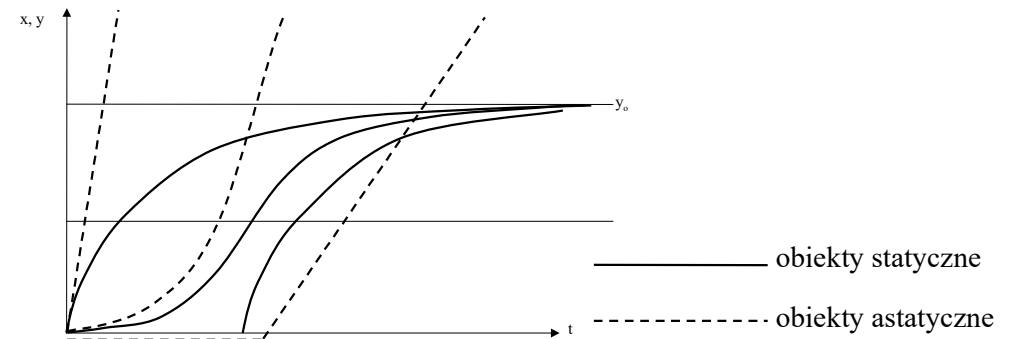
- **o stałych rozłożonych:** zmiany wartości sygnału wyjściowego zależą od miejsca pomiaru, obiekt opisany jako funkcja przestrzeni, wymagający bardziej złożonego modelowania matematycznego.

## Rodzaje obiektów liniowych w URA

- **elementarne:** o charakterystyce jak dla typowych elementów automatyki,
- **złożone:** o charakterystyce będącej złożeniem charakterystyk typowych elementów automatyki,

## Rodzaje obiektów liniowych w URA

- **statyczne:** (z wyrównaniem) posiadają zdolność do samoczynnego osiągnięcia stanu równowagi po wymuszeniu skokowym,
- **astatyczne:** (bez wyrównania) nie osiągają stanu równowagi po wymuszeniu skokowym,



## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie:

- układy sterowania o pełnej informacji o obiekcie
  - zwykłe
    - stabilizacji,
    - nadążne (śledzące),
    - sterowania programowego,
  - optymalne,
- układy sterowania o niepełnej informacji o obiekcie:
  - adaptacyjne,
  - sterowania rozmytego (fuzzy control),
  - sterowania opartego na sieciach neuronowych.

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie: **pełna informacja**

Zadaniem **układów stabilizacji** jest utrzymywanie wielkości regulowanej na określonym, w miarę możliwości stałym poziomie w obecności zakłóceń, które działają na sterowany proces.

**Układy stabilizacji** to podstawowe, najprostsze i najczęściej stosowane układy automatyczne.

*np. regulacja (stabilizacja) temperatury*

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie: **pełna informacja**

Zadaniem układów **nadążnych (śledzących)** jest możliwie wierne odtworzenie przez wielkość wyjściową danego obiektu wszelkich zmian wartości zadanej.

Przyjmuje się, że w takim układzie wartość zadana będzie się zmieniać zgodnie z pewną nieznaną funkcją czasu, której wartość jest znana tylko w chwili bieżącej,  
*np. wspomaganie ruchu kierownicy*

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie: **pełna informacja**

W układach sterowania **programowego** zadaniem jest jak poprzednio możliwie wierne odtworzenie przez wielkość wyjściową danego obiektu zmian wartości zadanej, ale w sytuacji, jeśli zmiany te są z góry znane w całym przedziale czasowym działania urządzenia,

*np. sterowanie numeryczne*

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie: **pełna informacja**

W układach sterowania **optymalnego (regulacja ekstremalna)** sygnał wyjściowy osiąga ekstremum. Zadaniem takich układów jest utrzymywanie wielkości regulowanej możliwie blisko wartości ekstremalnych.

*np. poszukiwanie punktu maksymalnej mocy dla instalacji fotowoltaicznej.*

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie: **niepełna informacja**

W **adaptacyjnych** układach regulacji nastawy regulatora są dostosowywane (adaptowane) każdorazowo gdy zmieniają właściwości obiektu.

*np. piece przemysłowe.*

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie: **niepełna informacja**

W układach sterowania **rozmytego** wykorzystywana jest *Logika rozmyta* będąca rozszerzeniem klasycznej logiki (0/1) na rozumowanie bliższe ludzkiemu rozumieniu pojęć. Tzn. Wprowadza ona wartości pomiędzy standardowe 0 i 1. 'rozmywa' granice pomiędzy nimi dając możliwość zaistnienia wartościom z pomiędzy tego przedziału.

*np. klimatyzacja, 'inteligentna' pralka .*

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na posiadaną informację początkową o obiekcie: **niepełna informacja**

W układach sterowania sterowania opartego na **sieciach neuronowych** wykorzystywana jest zdolność do uczenia się sieci neuronowych, co umożliwia „przechwytywanie” funkcji sterowanego procesu z uwzględnieniem jego wielowymiarowych atrybutów, również tych niemierzalnych.

*np. autonomiczne pojazdy, drony, procesy przemysłowe .*

## Układy sterowania / URA

Podział ze względu na rodzaj elementów

- liniowe  
wszystkie elementy układu są liniowe, tzn. spełniona jest zasada superpozycji mówiąca, że:  
*sumie sygnałów sterujących doprowadzonych do danego elementu odpowiada suma sygnałów sterowanych, przy czym każdy z sygnałów sterowanych jest wywołany odpowiadającym mu sygnałem sterującym.*
- nieliniowe  
w układzie występuje przynajmniej jeden element nieliniowy, tzn. niespełniający zasady superpozycji

## Projektowanie URA

Z punktu widzenia automatyki, identyfikacja obiektu regulacji polega na przeprowadzeniu czynności, których efektem jest uzyskanie **opisu matematycznego** danego obiektu (procesu).

Opis matematyczny stanowi **równanie lub układ równań**, jednoznacznie określający zależności sygnałów wyjściowych od wejściowych



## Projektowanie URA

Formy modelu matematycznego obiektu (procesu):

- Równanie, lub układ równań **różniczkowych**, opisujących zależności w zmiennej czasu,
- Równania **macierzowe** łączące sygnały wej- wyj- ze zmiennymi stanu obiektu,
- **Transmitancja** obiektu - dla obiektów liniowych, po przeprowadzeniu transformacji liniowych równań różniczkowych.

Powyższe postacie modelu matematycznego są możliwe do uzyskania na drodze analitycznej gdy obiekty są identyfikowalne.

## Projektowanie URA -algorytm

Jednoznaczna identyfikacja obiektu umożliwia przystąpienie do projektowania URA.

Projektowanie polega na przeprowadzaniu kolejnych działań **syntezy i analizy** układu.

Analiza jest konieczna, ponieważ synteza układu jest prowadzona metodami teoretycznymi, często mocno przybliżonymi (intuicyjnymi) i wymaga sprawdzenia w procesie analizy zaprojektowanego układu.

## Projektowanie URA -algorytm

Proces projektowania układu sterowania składa się z kilku etapów:

1. Analiza obiektu
2. Określenie wymagań
3. Wybór struktury sterowania
4. Synteza regulatora
5. Analiza stabilności
6. Symulacja i testy
7. Implementacja
8. Optymalizacja i utrzymanie

## Projektowanie URA -charakterystyki układów

Działanie układów automatyki polega na przetwarzaniu sygnałów:

- w stanach ustalonych (statycznych),  
stan jest statyczny gdy sygnały wej- wyj- mają stabilne wartości. Wartości sygnałów wyjściowych zależą tylko od aktualnej wartości sygnałów wejściowych.  
Charakterystyki statyczne są opisywane równaniami algebraicznymi.

## Projektowanie URA -charakterystyki układów

Działanie układów automatyki polega na przetwarzaniu sygnałów:

- w stanach nieustalonych (dynamicznych),  
stan jest dynamiczny, gdy sygnały wej- wyj- zależą nie tylko od ich aktualnych wartości, ale także od ich wartości wcześniejszych. Charakterystyki dynamiczne uwzględniają zmiany odpowiednich sygnałów w czasie.

Charakterystyki dynamiczne są opisywane równaniami różniczkowymi (ruchu), transmitancjami, wykresami czasowymi lub tabelami.

## Projektowanie URA -charakterystyki układów

Działanie układów automatyki polega na przetwarzaniu sygnałów:

- w stanach nieustalonych (dynamicznych),

Analiza rzeczywistych równań dynamiki byłaby trudna, a często niemożliwa. Dlatego wprowadza się szereg uproszczeń.

Jednym z nich jest zastąpienie równania nieliniowego równaniem liniowym. Dokonywane jest to poprzez rozwinięcie funkcji nieliniowej w szereg Taylora wokół punktu pracy i odrzuceniu części nieliniowej tego rozwinięcia (**linearyzacja**).

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{l=0}^m b_l(t) \frac{d^l x}{dt^l},$$

## Projektowanie URA -charakterystyki układów

Działanie układów automatyki polega na przetwarzaniu sygnałów:

- w stanach nieustalonych (dynamicznych),

ogólna postać równania różniczkowego:

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^m x}{dt^m}, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0$$

Dla rzeczywistych układów dynamicznych powyższa funkcja ma charakter **nieliniowy i niestacjonarny**.

Jednak w większości przypadków zarówno niestacjonarność jak i nieliniowość są do **pominięcia**.

## Projektowanie URA -charakterystyki układów

Liniowość i linearyzacja:

Linearyzacja, o ile jest możliwa i **nie** prowadzi do zbyt dużych błędów pozwala na znaczące uproszczenie równania i ułatwienie analizy elementu.

Pierwszym przybliżeniem w badaniu elementów nieliniowych jest ich uproszczenie poprzez linearyzację elementów wprowadzających nieliniowości.

## Liniowość układów

### Liniowość i linearyzacja:

w układach liniowych obowiązuje zasada superpozycji:

jeżeli sygnał wejściowy można przedstawić w postaci sumy sygnałów składowych, to sygnał wyjściowy jest sumą sygnałów wyjściowych wywołanych przez odpowiednie składowe sygnały wejściowego, czyli:

odpowiedź na wymuszenie  $x = \sum_{i=1}^m a_i x_i$

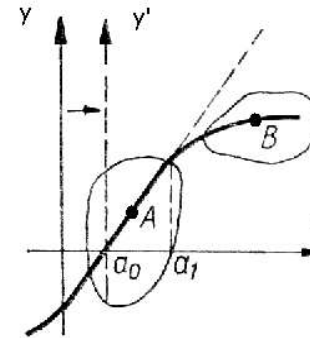
będącej kombinacją wymuszeń  $x_1, \dots, x_m$  jest równie kombinacji liniowej odpowiedzi  $y = \sum_{i=1}^m a_i y_i$ ,

przy czym  $y_i$  jest odpowiedzią układu na odpowiednie wymuszenie  $x_i$ .

## Liniowość układów

### Linearyzacja:

- Statyczna: dotyczy elementów statycznych opisanych równaniem algebraicznym i polega na analizowaniu tych obszarów charakterystyki, w których przebieg sygnału jest zbliżony do liniowego,

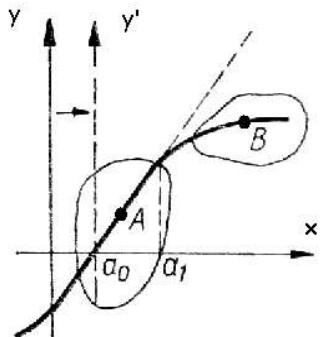


Jeżeli obszar pracy elementu zawiera się w otoczeniu pewnego punktu nie wykraczając poza fragment charakterystyki będący w przybliżeniu prostoliniowy, to możliwa jest linearyzacja statyczna.

## Liniowość układów

### Linearyzacja:

- Statyczna: dotyczy elementów statycznych opisanych równaniem algebraicznym i polega na analizowaniu tych obszarów charakterystyki, w których przebieg sygnału jest zbliżony do liniowego,



**Punkt pracy** – zachowanie układu badane jest w konkretnym punkcie i jego otoczeniu.

**Rozwinięcie w szereg Taylora** – dokonujemy rozwinięcia funkcji opisującej układ wokół punktu pracy, zatrzymując się na pierwszym rzędzie, czyli bez wyrazów nieliniowych.

W pobliżu punktu pracy układ zachowuje się jak liniowy, co upraszcza analizę i sterowanie.

## Liniowość układów

### Linearyzacja:

rozwinięcie w szereg Taylora funkcji  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_0 (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \bigg|_0 \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \bigg|_0 \ddot{x} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}} \bigg|_0 x^{(n)} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_0 (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \bigg|_0 \dot{y} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \bigg|_0 y^{(n)} + \\ &+ \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \bigg|_0 (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \bigg|_0 \dot{x}^2 + \dots + R}_{N} \end{aligned}$$

aby otrzymać równanie zlinearyzowane, odrzucamy wszystkie składniki nieliniowe oraz resztę szeregu.



## Liniiowość układów

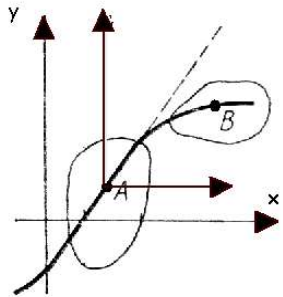
### Linearyzacja:

- Statyczna: dotyczy elementów statycznych opisanych równaniem algebraicznym i polega na analizowaniu tych obszarów charakterystyki, w których przebieg sygnału jest zbliżony do liniowego,

**Punkt pracy** –  $A(x_0, y_0)$

**Rozwinięcie w szereg Taylora –**

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} (y-y_0)$$



$$f(x, y) = f(x_0, y_0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} (y-y_0) = 0$$

## Liniiowość układów

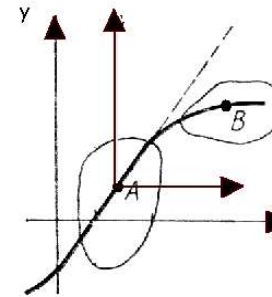
### Linearyzacja:

- Statyczna: dotyczy elementów statycznych opisanych równaniem algebraicznym i polega na analizowaniu tych obszarów charakterystyki, w których przebieg sygnału jest zbliżony do liniowego,

**Punkt pracy** –  $A(x_0, y_0)$

**Rozwinięcie w szereg Taylora –**

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} (y-y_0) = 0$$



$$y = y_0 - \left. \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0) ;$$

$$\Delta x = (x-x_0); \quad \Delta y = (y-y_0) \quad \Delta y = - \left. \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \right|_{x=x_0, y=y_0} \Delta x$$

## Liniiowość układów

*Przykład:*

*Przeprowadzić linearyzację równania:  $y = x^2$*

*w punkcie pracy o współrzędnej  $x_{0n}=1, y_{0n}=1$*

1 Postać ogólna równania:

$$f(x, y) = y - x^2 = 0$$

2 Pochodne funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, y_0)$

$$\delta f / \delta x = -2x_{0n} = -2$$

3 Równanie zlinearyzowane:

$$y = 2x - 1 \quad \Delta y = 2 \Delta x$$

$$y = y_0 - \left. \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0) ;$$

$$\Delta y = - \left. \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \right|_{x=x_0, y=y_0} \Delta x$$

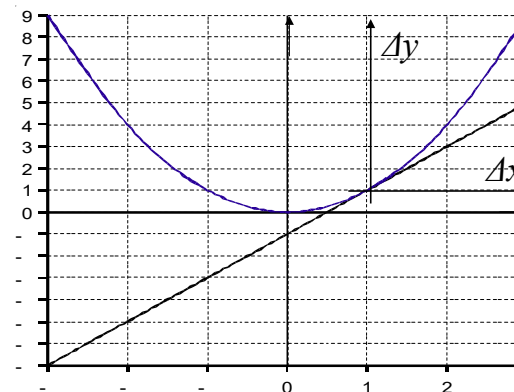
$$\delta f / \delta y = 1$$

## Liniiowość układów

*Przykład:*

*Przeprowadzić linearyzację równania:  $y = x^2$*

*w punkcie pracy o współrzędnej  $x_{0n}=1$*



3 Równanie zlinearyzowane:

$$y = 2x - 1$$

$$\Delta y = 2 \Delta x$$

## Liniiowość układów

### Linearyzacja:

- dynamiczna:

aby układ dał się zlinearyzować, musi spełniać następujące warunki:

1. Układ jest opisywany jedynie w pewnym niewielkim otoczeniu punktu pracy układu, na nieliniowej charakterystyce,
2. Charakterystyka nieliniowa jest w rozpatrywanym punkcie pracy ciągła

## Liniiowość układów

### Linearyzacja:

- dynamiczna:

Przyjmijmy, że stacjonarny układ jest opisany nieliniowym równaniem różniczkowym:

$$f(x, x', \dots, x^{(m)}, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$x' = \frac{dx}{dt}; \quad x^{(m)} = \frac{d^{(m)}x}{dt^{(m)}}$$

Powyższe równanie można zlinearyzować analitycznie poprzez rozwinięcie w szereg Taylora w rozpatrywanym punkcie pracy  $S(x_0, y_0)$  i odrzucenie składników nieliniowych.

## Liniiowość układów

### Linearyzacja:

- dynamiczna:

Rozwijając w szereg Taylora funkcję  $f$ , każdą z pochodnych wielkości wejściowych i wyjściowych traktuje się jako oddzielną zmienną niezależną.

Po rozwinięciu funkcji  $f$  w otoczeniu punktu  $S$  oraz po odrzuceniu składników nieliniowych:

$$f(x, x', \dots, x^{(m)}, y, y', \dots, y^{(n)}) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x'} \right|_S (x') + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x^{(m)}} \right|_S (x^{(m)}) + \\ + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_S (y - y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_S (y') + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_S (y^{(n)})$$

## Liniiowość układów

### Linearyzacja:

- dynamiczna:

Rozwijając w szereg Taylora funkcję  $f$ , każdą z pochodnych wielkości wejściowych i wyjściowych traktuje się jako oddzielną zmienną niezależną.

Po rozwinięciu funkcji  $f$  w otoczeniu punktu  $S$  oraz po odrzuceniu składników nieliniowych i uproszczeniu daje postać:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x'} \right|_S (x') + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x^{(m)}} \right|_S (x^{(m)}) = - \left( \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_S (y - y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_S (y') + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_S (y^{(n)}) \right)$$

która jest zlinearyzowanym wokół punktu  $S$  równaniem elementu dynamicznego.

## Liniowość układów

### Linearyzacja:

- dynamiczna:

Przesuwając początek układu współrzędnych do punktu  $S$  i dokonując zamiany zmiennych:

$$\Delta x = (x - x_0); \Delta y = (y - y_0); \Delta x' = x'; \Delta y' = y'; \dots$$

uzyskujemy zlinearyzowane równanie dla przyrostów zmiennych:

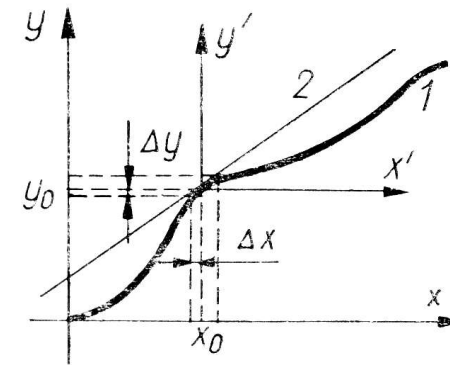
$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_S \Delta x + \left. \frac{\delta f}{\delta x'} \right|_S \Delta x' + \dots + \left. \frac{\delta f}{\delta x^{(m)}} \right|_S \Delta x^{(m)} = - \left( \left. \frac{\delta f}{\delta y} \right|_S \Delta y + \left. \frac{\delta f}{\delta y'} \right|_S \Delta y' + \dots + \left. \frac{\delta f}{\delta y^{(n)}} \right|_S \Delta y^{(n)} \right)$$

## Liniowość układów

### Linearyzacja:

- dynamiczna:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_S \Delta x + \left. \frac{\delta f}{\delta x'} \right|_S \Delta x' + \dots + \left. \frac{\delta f}{\delta x^{(m)}} \right|_S \Delta x^{(m)} = - \left( \left. \frac{\delta f}{\delta y} \right|_S \Delta y + \left. \frac{\delta f}{\delta y'} \right|_S \Delta y' + \dots + \left. \frac{\delta f}{\delta y^{(n)}} \right|_S \Delta y^{(n)} \right)$$



## Liniowość układów

### Linearyzacja:

- dynamiczna:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_S \Delta x + \left. \frac{\delta f}{\delta x'} \right|_S \Delta x' + \dots + \left. \frac{\delta f}{\delta x^{(m)}} \right|_S \Delta x^{(m)} = - \left( \left. \frac{\delta f}{\delta y} \right|_S \Delta y + \left. \frac{\delta f}{\delta y'} \right|_S \Delta y' + \dots + \left. \frac{\delta f}{\delta y^{(n)}} \right|_S \Delta y^{(n)} \right)$$

*Przykład:*

*Zapisać ogólną postać równania zlinearyzowanego dla równania nieliniowego pierwszego rzędu.*

## Liniowość układów

*Przykład:*

*Zlinearyzować układ opisany równaniem różniczkowym:*

$$g(y) \frac{dy}{dt} = x - h\sqrt{y}$$

1 Postać ogólna równania:

$$f(x, y, \frac{dy}{dt}) = g(y) \frac{dy}{dt} - x + h\sqrt{y}$$

2 Charakterystyka statyczna:

$$x_o = h\sqrt{y_o}$$

3 Pochodne funkcji  $f$  w punkcie  $(x_o, y_o)$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_o = -1$$

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_o = \frac{h}{2\sqrt{y_o}}$$

$$\left. \frac{df}{d \frac{dy}{dt}} \right|_o = g(y_o)$$

## Liniowość układów

*Przykład:*

*Zlinearyzować układ opisany równaniem różniczkowym:*

$$g(y) \frac{dy}{dt} = x - h\sqrt{y}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_o = -1$$

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_o = \frac{h}{2\sqrt{y_o}}$$

$$\left. \frac{df}{d \frac{dy}{dt}} \right|_o = g(y_o)$$

4 Równanie zlinearyzowane:

$$-\Delta x + \frac{h}{2\sqrt{y_o}} \Delta y + g(y_o) \frac{d\Delta y}{dt} = 0$$

4 Zapisać postać równania dla punktu o  $x_o=2$ :